

SPIS TREŚCI

WSTĘP	11
1. LICZBY RZECZYWISTE	
Teoria	14
Rozgrzewka 1.	22
P1.1. Przedstawianie liczb rzeczywistych w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, rozwinięcia dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg)	25
P1.2. Obliczanie wartości wyrażeń arytmetycznych (w tym wymiernych)	29
P1.3. Posługiwanie się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosowanie praw działań na pierwiastkach	31
P1.4. Obliczanie potęg o wykładnikach wymiernych i stosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych	35
P1.5. Wykorzystywanie podstawowych własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką)	37
P1.6. Wykorzystywanie definicji logarytmu i stosowanie w obliczeniach wzorów na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym	40
R1.2. Stosowanie w obliczeniach wzoru na logarytm potęgi oraz wzoru na zamianę podstawy logarytmu	42
P1.7. Obliczanie błędu bezwzględnego i błędu względnego przybliżenia ...	44
P1.8. Posługiwanie się pojęciem przedziału liczbowego, zaznaczanie przedziałów na osi liczbowej	46
R1.1. Wykorzystywanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej, zaznaczanie na osi liczbowej zbiorów opisanych za pomocą równań i nierówności typu: $ x - a = b$, $ x - a < b$, $ x - a \geq b$	48
P1.9. Wykonywanie obliczeń procentowych, obliczanie podatków, zysków z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok)	50
Czy już umiesz?	55
2. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE	
Teoria	59
Rozgrzewka 2.	66
P2.1. Używanie wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$	68
R2.1. Używanie wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$	72
R2.3. Rozkładanie wielomianów na czynniki za pomocą wzorów skróconego mnożenia lub wyłączania wspólnego czynnika przed nawias	74

R2.2.	Dzielenie wielomianów przez dwumian $ax + b$	76
R2.4.	Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów	78
R2.5.	Wyznaczanie dziedziny prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych	80
R2.6.	Dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych; rozszerzanie i skracanie (w łatwych przykładach) wyrażeń wymiernych	83
	Czy już umiesz?	85

3. RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

Teoria	90	
Rozgrzewka 3.	98	
P3.1.	Sprawdzanie, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności	100
P3.2.	Wykorzystywanie interpretacji geometrycznej układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi	102
P3.3.	Rozwiązywanie nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	105
P3.4.	Rozwiązywanie równań kwadratowych z jedną niewiadomą	108
P3.5.	Rozwiązywanie nierówności kwadratowych z jedną niewiadomą	110
R3.1.	Stosowanie wzorów Viète'a	112
R3.2.	Rozwiązywanie równań i nierówności liniowych i kwadratowych z parametrem	116
R3.3.	Rozwiązywanie układów równań, prowadzących do równań kwadratowych	119
P3.6.	Korzystanie z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$	123
P3.7.	Korzystanie z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$	125
R3.4.	Stosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$	126
R3.5.	Stosowanie twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych	128
R3.6.	Rozwiązywanie równań wielomianowych dających się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych	130
R3.7.	Rozwiązywanie łatwych nierówności wielomianowych	131
P3.8.	Rozwiązywanie prostych równań wymiernych prowadzących do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x + 1}{x + 3} = 2$, $\frac{x + 1}{x} = 2x$	133

R3.8. Rozwiązywanie prostych nierówności wymiernych typu: $\frac{x+1}{x+3} > 2, \frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4x}, \frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x}$	135
R3.9. Rozwiązywanie równań i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż: $ x+1 -2 =3, x+3 + x-5 >12$	138
Czy już umiesz?	141

4. FUNKCJE

Teoria	147
Rozgrzewka 4.	157
P4.1. Określanie funkcji za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego	159
P4.2. Obliczanie ze wzoru wartości funkcji dla danego argumentu. Posługiwanie się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość	160
P4.3. Odczytywanie z wykresu własności funkcji (dziedzina, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak, punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą)	163
P4.4. Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicowanie wykresów funkcji $y = f(x+a), y = f(x)+a, y = -f(x), y = f(-x)$	164
R4.1. Na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicowanie wykresów funkcji $y = f(x) , y = cf(x), y = f(cx)$	165
P4.5. Rysowanie wykresu funkcji liniowej z wykorzystaniem jej wzoru ...	168
P4.6. Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie	169
P4.7. Interpretacja współczynników występujących we wzorze funkcji liniowej	171
P4.8. Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej na podstawie jej wzoru	173
P4.9. Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie	175
P4.10. Interpretacja współczynników występujących we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w ogólnej i iloczynowej (o ile istnieje)	178
P4.11. Wyznaczanie wartości najmniejszej i największej funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym	180
P4.12. Wykorzystanie własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym)	182

P4.13. Szkicowanie wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego a , korzystanie ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi	184
P4.14. Szkicowanie wykresów funkcji wykładniczych dla różnych podstaw	187
P4.15. Posługiwanie się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym	190
R4.2. Szkicowanie wykresów funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw	192
R4.3. Posługiwanie się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych i chemicznych, także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym	193
R4.4. Szkicowanie wykresu funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami, odczytywanie własności takiej funkcji z wykresu	195
Czy już umiesz?	197

5. CIĄGI LICZBOWE

Teoria	202
Rozgrzewka 5.	206
P5.1. Wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym	208
R5.1. Wyznaczanie wyrazów ciągu określonego wzorem rekurencyjnym	210
P5.2. Badanie, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny	211
P5.3. Stosowanie wzoru na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego	214
P5.4. Stosowanie wzoru na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego	220
R5.2. Obliczanie granic ciągów z wykorzystaniem granic ciągów typu $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ oraz twierdzeń o działaniach na granicach ciągów	224
R5.3. Rozpoznawanie szeregów geometrycznych zbieżnych i obliczanie ich sum	227
Czy już umiesz?	230

6. TRYGNOMETRIA

Teoria	235
Rozgrzewka 6.	242
P6.1. Korzystanie z definicji i wyznaczanie wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180°	244

P6.2.	Korzystanie z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora)	246
P6.3.	Obliczanie miary kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (dokładnej albo – przy użyciu tablic lub kalkulatora – przybliżonej)	248
P6.4.	Stosowanie prostych zależności między funkcjami trygonometrycznymi, np. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	250
P6.5.	Wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy dany jest sinus lub cosinus tego kąta	252
R6.1.	Stosowanie miary łukowej, zamiana miary łukowej kąta na stopniową i odwrotnie	254
R6.2.	Korzystanie z definicji i wyznaczanie wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego)	255
R6.3.	Wykorzystywanie okresowości funkcji trygonometrycznych	257
R6.4.	Posługiwanie się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. do rozwiązywania nierówności typu $\sin x > a$, $\cos x \leq a$, $\operatorname{tg} x > a$) ...	258
R6.5.	Stosowanie wzorów na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów	260
R6.6.	Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$...	263
	Czy już umiesz?	265

7. GEOMETRIA

Teoria	270	
Rozgrzewka 7.	289	
P7.1.	Stosowanie zależności między kątem środkowym i wpisanym	291
P7.2.	Korzystanie z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych	294
R7.1.	Stosowanie twierdzeń charakteryzujących czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu	296
R7.2.	Stosowanie twierdzenia Talesa i twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych	299
R7.3.	Znajdowanie obrazów niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.)	301
P7.3.	Rozpoznawanie trójkątów podobnych i wykorzystywanie cech podobieństwa trójkątów (także w kontekście praktycznym)	302

R7.4.	Rozpoznawanie figur podobnych i jednokładnych, wykorzystywanie (także w kontekstach praktycznych) ich własności	304
P7.4.	Korzystanie z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi	306
R7.5.	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzeń sinusów i cosinusów	308
	Czy już umiesz?	311

8. GEOMETRIA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

	Teoria	315
	Rozgrzewka 8.	322
P8.1.	Wyznaczanie równania prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej)	324
P8.2.	Badanie równoległości i prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych	325
R8.2.	Badanie równoległości i prostopadłości prostych na podstawie ich równań ogólnych	327
P8.3.	Wyznaczanie równania prostej równoległej lub prostopadłej do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzącej przez dany punkt	328
R8.3.	Wyznaczanie równania prostej równoległej lub prostopadłej do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzącej przez dany punkt	330
P8.4.	Obliczanie współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych	331
R8.1.	Interpretacja graficzna nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi i układów takich nierówności	333
P8.5.	Wyznaczanie współrzędnych środka odcinka	335
P8.6.	Obliczanie odległości dwóch punktów	336
R8.4.	Obliczanie odległości punktu od prostej	338
P8.7.	Znajdowanie obrazów figur geometrycznych (np. punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu	340
R8.5.	Posługiwanie się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, opisywanie koła za pomocą nierówności	342
R8.6.	Wyznaczanie punktów wspólnych prostej i okręgu	346
R8.7.	Obliczanie współrzędnych i długości wektora, dodawanie i odejmowanie wektorów, mnożenie ich przez liczbę; interpretacja geometryczna działań na wektorach	349
R8.8.	Stosowanie wektorów do opisu przesunięcia wykresu funkcji	351
	Czy już umiesz?	354

9. STEROMETRIA

Teoria	358
Rozgrzewka 9.	365
P9.1. Rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), obliczanie miar tych kątów	367
P9.2. Rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między odcinkami i płaszczyznami (np. krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), obliczanie miar tych kątów	370
P9.3. Rozpoznawanie w walcach i stożkach kątów między odcinkami oraz kątów między odcinkami i płaszczyznami (np. kąta rozwarcia stożka, kąta między tworzącą a podstawą), obliczanie miary tych kątów	373
P9.4. Rozpoznawanie w graniastosłupach i ostrosłupach kątów między ścianami	375
P9.5. Określanie, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną	376
P9.6. Stosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości brył	379
R9.1. Określanie, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną	381
R9.2. Określanie, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną	383
Czy już umiesz?	386

10. ELEMENTY STATYSTYKI OPISOWEJ. TEORIA PRAWDOPODOBIENSTWA I KOMBINATORYKA

Teoria	390
Rozgrzewka 10.	400
P10.1. Obliczanie średniej ważonej i odchylenia standardowego zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretacja tych parametrów dla danych empirycznych	402
P10.2. Zliczanie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosowanie reguły mnożenia i reguły dodawania	405
R10.1. Korzystanie ze wzorów na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych	410
P10.3. Obliczanie prawdopodobieństw w prostych sytuacjach, na podstawie klasycznej definicji prawdopodobieństwa	413
R10.2. Obliczanie prawdopodobieństwa warunkowego	417
R10.3. Korzystanie z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym	419
Czy już umiesz?	423

11. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Teoria	428
Rozgrzewka 11.	438
R11.1. Obliczanie granic funkcji (i granic jednostronnych) z wykorzystaniem twierdzeń o działaniach na granicach i własności funkcji ciągłych	439
R11.2. Obliczanie pochodnych funkcji wymiernych	441
R11.3. Korzystanie z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej	442
R11.4. Korzystanie z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji	443
R11.5. Znajdowanie ekstremów funkcji wielomianowych i wymiernych ...	446
R11.6. Stosowanie pochodnych do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych	449
Czy już umiesz?	453
ODPOWIEDZI	454